Zusammenfassung HM IV

Variationsrechnung:

- Sei $f \in D$ ein Extremwert für das Funktional $A: D \to \mathbb{R}$ und $h \in V$ sei zulässig ($\forall \varepsilon \in \mathbb{R}$ mit $|\varepsilon|$ klein gilt $f+\varepsilon h \in D$). Dann gilt: $\underbrace{\frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} A(f+\varepsilon h)}_{\delta A(f)\ \ldots\ \text{Erste Variation}} = 0$
- Ist f Max für $A: D \to \mathbb{R}$, dann ist $\frac{d^2}{d\varepsilon^2}\Big|_{\varepsilon=0} A(f+\varepsilon h) \leq 0$ (ist $f'' < 0 \Rightarrow$ Max nur im endl.-dim. richtig)
- $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. $\forall h \in C^2[a,b] \to \mathbb{R}$ mit $h(a) = h(b)$ gelte $\int_a^b f \cdot h \, dt = 0 \Rightarrow f \equiv 0$
- Sei $f \in C^2[x_1, x_2]$ ein Extremum für $I: D \to \mathbb{R}$. Dann erfüllt f die Dgl.: $F_y = \frac{d}{dx} F_{y'}$
- Ist $\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ein 2x stg. diffb. Weg, für den $I(\gamma) = \int_a^b F(t, \gamma, \gamma')\,dt$ ein lokales Extremum ist. Dann gilt: $\frac{\partial F}{\partial x_j} = \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial x_j'}$

Freie Ränder:

- Sei $F \in C^1(\mathbb{R}^3)$ mit $\int_{x_1}^{x_2} F\,dx$. Ist f Extremwert von I unter allen $y \in C^2[x_1, x_2]$ mit $y(x_1) = y_1$, dann:
  (i) $F_y = \frac{d}{dx} F_{y'}$
  (ii) $F_{y'}(x_2, f(x_2), f'(x_2)) = 0$ ... natürl. Randbedingung (analog für 2 freie Ränder)

Rand auf Graph:

- Sei f Extremwert von I mit rechtem Rand auf Graphen von w. Dann gilt für jedes zulässige g ($g \in C^2[x_1, b+\delta]$ mit $g(x_1)=0$):
$$\int_{x_1}^{b} \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} \right) g(x)\,dx + \left[\left(\frac{\partial F}{\partial y'} + \frac{F}{w'-f'} \right) \cdot g \right]_{x=b}$$
$$\hookrightarrow \frac{\partial F}{\partial y'} + \frac{F}{w'-f'}\Big|_{x=b} = 0 \quad \ldots \text{Transversalitätsbedingung}$$
- Ist γ der minimierende Weg, der in $x=b$ auf $y = w(x)$ trifft, dann sind Tangenten an γ und w in b senkrecht!

Variation mit NB:

- NB.: $G = 0 \Rightarrow H = F - \lambda G \Rightarrow L(y) = \int H\,dx$. Ist f Extr. von I unter $G = \text{const.}$, dann gilt
$$\frac{\partial H}{\partial y}(x, f, f') = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial H}{\partial y'}(x, f, f')\right)$$

Zwangsbedingung: 2 Mgl.:

(i) Löse Zwangsbed. nach einer Variable auf und setze ein $\to$ gewöhnliches Variationsproblem

(ii) Sei $F, G: \mathbb{R}^{2n+1} \to \mathbb{R}$ stg. diffb., $I(\gamma) = \int_a^b F\,dt$. Sei $\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^n$ 2x stg. diffb. und Extremum von I unter Zwangsbedingung $G(t, \gamma, \gamma') = 0$. Dann gibt es eine diffb. Fkt. $\lambda: [a,b] \to \mathbb{R}$ mit
$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(F - \lambda(t) G\right) = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial x_i'}\left(F - \lambda G\right)$$

Mehrere Variablen:

- Die part. Dgl
$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} p_j(\underline{x}) \frac{\partial u}{\partial x_j}(\underline{x}) + q(\underline{x}) \cdot u(\underline{x}) = h(\underline{x}) \quad [\text{mit } p_j: \Omega \cup \partial\Omega \to \mathbb{R} \text{ 2x stg. diffbar}, q, h: \Omega \cup \partial\Omega \to \mathbb{R} \text{ auch}]$$
ist Euler-Gl. für Extrema d. Funktionals $I(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega \left(\sum_{j=1}^{n} p_j(\underline{x}) \left(\frac{\partial u}{\partial x_j}(\underline{x})\right)^2 - q(\underline{x}) u(\underline{x})^2 + 2h(\underline{x}) u(\underline{x}) \right) d\underline{x}$

Näherungslösungen für Variationsprobleme:

- *Normierte Räume:*
  - Norm $\|\cdot\|: V \to [0, \infty)$ mit: (i) $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$ (ii) $\|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$ (iii) $\|v+w\| \leq \|v\| + \|w\|$
  - Bsp.: $\|\underline{x}\|_p := \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p \right)^{1/p}$
  - Norm ist bekannt, wenn die "Einheitskugel" $E = \{v \in V : \|v\| \leq 1\}$
    (i) zentralsymmetr. ($v \in E \Leftrightarrow -v \in E$)
    (ii) konvex (d.h. $\forall v, w \in E$ ist $\lambda v + (1-\lambda) w \in E \ \forall \lambda \in [0,1]$) ist.
  - Norm beschreibt durch $\|v - w\|$ einen Abstand auf V. v_n heißt konvergent gegen v, wenn $\lim_{j\to\infty} \|v_j - v\| = 0$
  - Vorsicht: konv. x_j bzgl. einer Norm gegen x, dann gilt auch $\lim x_j^{(i)} = x^{(i)}$; falsch in ∞-dim!!!

Norm. Räume:
- $L^p(\Omega) = \{ f: \Omega \to \mathbb{R} : \int |f|^p \, dx < \infty \}$
- $\ell^2 = \{ (x_j)_{j \in \mathbb{N}} : x_j \in \mathbb{R}, \sum_{j=1}^{\infty} x_j^2 < \infty \}$

- Eine Basis in V ist Folge $v_n \in V$, s.d. jedes $w \in V$ eine endl. Linearkombination der v_j ist.
- Eine Approximationsbasis ist Folge v_n, s.d. es zu $\varepsilon > 0$ eine endl. Linearkombination $w_j = \sum_{j=1}^{J} \lambda_j v_j$ gibt mit $\|w - w_j\| < \varepsilon$
- Sei V normierter VR; $I: V \to \mathbb{R}$ heißt stetig in v, wenn für jede Folge $v_j \in V$ mit $\lim_{j\to\infty} \|v_j - v\| = 0$ der Grenzwert $\lim_{j\to\infty} I(v_j) = I(v)$ existiert.

Ideen für Näherungslösungen von Variationsproblemen:

a) Euler: Polygonzugverfahren

b) Ritz-Verfahren: Seien v_i Approx.-Basis. Dabei wähle v so, dass evt. Randbed. erfüllt sind. Betrachte jetzt:
$I(v_0 + \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n)$ (für $\underline{\alpha} \in U \subset \mathbb{R}^n$, U offen; $v_0 + \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n \in D$).
Suche Extremwerte über $\frac{\partial I}{\partial \alpha_j} = 0$

c) Galerkin-Verfahren: V norm. VR; $D \subset V$. $I: D \to \mathbb{R}$ stg. Wenn I in $y \in D$ Extremwert hat, dann ist
$0 = \frac{d}{d\varepsilon}\big|_{\varepsilon=0} I(y + \varepsilon v) =: \delta I(y, v)$ $\forall$ zulässigen v, d.h. $y + \varepsilon v \in D$ für $|\varepsilon|$ klein.
(Menge d. zulässigen v sollten möglichst großen VR ~~U~~ $U \subset V$ bilden)
Suche jetzt approx. Lsg. d. Gleichungssystems $\delta I(y, v) = 0$ $\forall v \in U$:
Wähle Approx.-Basen u_j, v_j
↳ Löse jetzt $\delta I(y, v) = 0$ $\forall v \in U_n$ für $y \in V_n$
Wenn $\delta I(y, v)$ in v linear ist, dann löse $\delta I(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n; v_j) = 0$

Einführung i.d. Funktionalanalysis:

- Hilberträume: • $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Ein $\mathbb{K}$-VR V mit Skalarprodukt $\langle\,;\,\rangle$, der bzgl. d. induz. Norm vollständig ist, heißt Hilbertraum (vollständig $\hat{=}$ jede Cauchy-Folge konvergiert)
  - $\langle\,;\,\rangle : V \times V \to \mathbb{K}$ ist Skalarprodukt, wenn: (i) $\langle v, v \rangle \geq 0$ ("=" bei $v = 0$)
    (ii) $\forall w \in V$ ist $v \to \langle v, w \rangle$ linear
    (iii) $\langle v, w \rangle = \langle \overline{w}, \overline{v} \rangle$
  - $\langle v, w \rangle = 0 \Leftrightarrow v, w$ orthogonal; sind $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ und gilt $\|v_i\| = 1$ $\forall i$, dann heißt v_i orthonormale Familie. Hat jedes $v \in V$ bzgl. einer orthonormalen Familie v_i eine Darstellung $v = \sum_{j=1}^{\infty} c_j v_j$ mit einer konvergenten Reihe, dann heißt v_j eine Orthonormale Hilbertbasis.
  - Sei V ein $\mathbb{K}$-Hilbertraum und v_j eine H-Basis. Dann gilt $\forall$ $v \in V$: $v = \sum_{j=1}^{\infty} \langle v, v_j \rangle v_j$ und die Darstellung ist eindeutig mit $c_j = \langle v, v_j \rangle$.
  - Sei V ein H-Raum und $v \perp w$. Dann gilt: $\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2$
  - Sei v_i eine orthonormale Familie. Dann gilt $\forall v \in V$:

    (i) $\sum_j |\langle v, v_j \rangle|^2 \leq \|v\|^2$ (Besselsche Ungl.)

    Ist v_j sogar H-Basis, dann gilt

    (ii) $\sum_j |\langle v, v_j \rangle|^2 = \|v\|^2$ (Parsevallsche Gl.)
  - Sei v_j eine ONHB, $x, y \in V$, dann gilt:
    $$\langle x, y \rangle = \sum_j \langle x, v_j \rangle \overline{\langle y, v_j \rangle} = \sum_j \langle x, v_j \rangle \langle v_j, y \rangle$$

- Lineare Abb. zw. H-Räumen: • V, W seien H-Räume. $T: V \to W$ heißt linear, wenn $T(\lambda v_1 + v_2) = \lambda \cdot T(v_1) + T(v_2)$ $\forall v_1, v_2 \in V$, $\lambda \in \mathbb{K}$.
  Sind V, W endl.-dim., dann ist jede lineare Abb. stetig; in ∞-dim. falsch!
  - $\|T\| := \sup_{\|v\|_V = 1} \|T(v)\|_W$
  - T ist stetig $\Leftrightarrow \|T\| < \infty$
  - Menge d. stg. lin. Abb. $H(V, W)$ bilden VR mit Norm: (i) $\|T\| = 0 \Leftrightarrow T(v) = 0$ $\forall v$
    (ii) $\|\lambda T\| = |\lambda| \cdot \|T\|$
    (iii) $\|T_1 + T_2\| \leq \|T_1\| + \|T_2\|$
  - V sei $\mathbb{R}$-Hilbertraum, $v \in V$ fest. Dann def. $T_v: V \to \mathbb{R}$; $T_v(x) = \langle x, v \rangle$ eine stg. lin. Abb mit $\|T_v\| = \|v\|$ $\quad \langle \frac{v}{\|v\|}, v \rangle = \|v\|$
  - Sei T eine stg. Linearform $T: V \to \mathbb{K}$ (V = $\mathbb{K}$-Hilbertraum). Dann gibt es genau ein $v \in V$ mit $T_x = \langle x, v \rangle$ $\forall x \in V$.
  - (Riesz'scher Darstellungssatz)
  - Seien X, Y $\mathbb{K}$-Hilberträume; sei $T: X \to Y$ stg. linear. Dann gibt es genau eine lineare Abb. $T^* = adj(T): Y \to X$ mit $\langle Tx, y \rangle_Y = \langle x, T^* y \rangle_X$.
    Es gilt $\|T\| = \|T^*\|$. Insbesondere ist T^* stg; heißt adjungierte von T (selbstadj. bei $T: X \to X$)

Integralgleichungen und Fredholm-Alternative:

- Typische Int-Gl.: geg. $\lambda \in \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$ Intervall; $K: I \times I \to \mathbb{R}$: $K \in L^2(I \times I)$. Gesucht sind $f: I \to \mathbb{R}$ mit $\lambda \cdot f = \int_I K(x,y) f(y)\,dy$
- Sei $I = [a,b]$ endl., abgeschl. Intervall. Sei $K \in L^2(I \times I)$. Dann ist durch $k: L^2(I) \circlearrowleft$; $k(f)(x) := \int_a^b K(x,y) f(y)\,dy$ ein Operator auf $L^2(I)$ definiert (d.h. k ist stetig).
  Hierzu: $k \in L^2(I)$
  $\|k\| \leq \|K\|_2$
- Seien X, Y Hilbert-Räume und $k: X \to Y$ sei linear. k heißt kompakt, wenn zu jeder Folge $x_n \in X$ mit $\|x_n\| \leq 1$ eine Teilfolge x_{n_j} ex., s.d. $k(x_{n_j})$ konvergiert.
- $K \in L^2(I \times I)$, dann ist $k(f)$ ein kompakter Operator
- Sei X Hilbertraum, $k: X \to X$ kompakt und $\lambda \neq 0$ sein EW. Dann ist $\dim Eig(\lambda) < \infty$
- Sei $K \in L^2(I \times I)$ und $\lambda \neq 0$. Dann ist d. Lsg.-Raum d. Int-Gl. $\lambda f = \int_a^b K(x,y) f(y)\,dy$ endl.-dimensional.
- Sei $k: L^2(I) \circlearrowleft$ def. mit „Kern" $K(x,y)$ durch $k(f)(x) := \int K(x,y) f(y)\,dy$. Dann definiert $\overline{K(y,x)}$ die Adjungierte k^*.
- Ist k ein kompakter, selbstadj. Operator auf einem Hilbertraum X, dann gibt es ONHB aus EV von k.
- Notation wie bisher, $\lambda_j \neq 0$, φ_j ONB von $Eig(0)^\perp$. Dann gilt: $K(x,y) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \overline{\varphi_j(x)} \varphi_j(y)$; $\|K\|_2^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^2$
  $\Rightarrow |\lambda_j| \leq \|K\|_2$
- Fredholm-Alternative: Sei $K \in L^2(I \times I)$ und $K^*(x,y) = \overline{K(y,x)}$. Dann sind k, k^* auf $L^2(I)$ zueinander adjungiert. Zu $g, \tilde{g} \in L^2(I)$ betrachte die Integralgleichungen

$$k(f) - f = g \quad ; \quad k^*(\tilde{f}) - \tilde{f} = \tilde{g}$$

  Entweder sind die Gl. für jedes Paar $g, \tilde{g}$ lösbar ($\to f = \tilde{f} = 0$ einzige Lsg.)
  oder die homogenen Gl. $k(f) = f$, $k^*(\tilde{f}) = \tilde{f}$ haben von Null versch. Lsg.; die Dim. d. beiden Lsg-Räume sind endlich und gleich!
- Spektrum: X sei Hilbertraum über $\mathbb{K}$, $T: X \circlearrowleft$ stetig, lin. Operator, λ EW $\Leftrightarrow \exists x \neq 0$ mit $Tx = \lambda x$
  $\Leftrightarrow (T - \lambda\, id)x = 0$
  $\Leftrightarrow Kern(T - \lambda\, id_X) \neq \{0\}$

  $Eig(\lambda) = Kern(T - \lambda\, id)$

  - $\lambda \in \mathbb{K}$ heißt regulärer Wert (zu T), wenn $T - \lambda\, id_X$ bijektiv ist (dann ist $(T - \lambda\, id)^{-1}$ wieder stetig)
    $R(T)$ = Menge aller regulären Werte ... Resolventenmenge
  - Das Komplement von $R(T)$ heißt Spektrum; $spec(T)$ (dessen Elemente Spektralwerte) (z.B. EW)
  - Ist T ein kompakter Operator und $\lambda \in spec(T) \neq 0 \Rightarrow \lambda$ EW
  - $R(T)$ ist offen ($\Rightarrow spec(T)$ ist abgeschlossen)
  - Ist $T: X \circlearrowleft$ bijektiver Operator und ist $T_1: X \circlearrowleft$ stetig und linear mit $\|T - T_1\| < \|T^{-1}\|^{-1}$. Dann ist auch T_1 bijektiv.
  - Sei $A: X \circlearrowleft$ linear mit $\|A\| < 1$. Dann ist durch $B = \sum_{n=0}^{\infty} A^n$ ein lin. Op. erklärt, und es gilt $B = (id - A)^{-1}$
    (Sinn: $T: X \circlearrowleft$ invertierbar: $T = id - (id - T)$. Ist $\|id - T\| < 1$ ...)
  - Sei $T: X \circlearrowleft$ stetig und linear. Dann gilt $spec(T) \subset \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \|T\|\}$
  - Ist λ Spektralwert, dann $|\lambda| \leq \|T\|$ ($\Rightarrow spec(T)$ ist kompakt)

Distributionen:

- $C_c^\infty(\Omega) = \{ f: \Omega \to \mathbb{K}$, beliebig oft diff'bar, $f = 0$ außerhalb eines kompakten Teils von $\Omega \}$
- $f \in C_c^\infty(\Omega) \Rightarrow f$ heißt Testfkt.
- $$D_{s_1,\dots,s_n} := \frac{\partial^{s_1 + \dots + s_n}}{\partial x_1^{s_1} \partial x_2^{s_2} \cdots \partial x_n^{s_n}}$$
- $$\|\varphi\|_{(m)} := \max_{\sum s_i \leq m} \|D_{s_1 \dots s_n} \varphi\|_\infty$$
- Eine Folge $\varphi_j \in C_c^\infty(\Omega)$ heißt konvergent gegen $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, wenn für jedes $m \in \mathbb{N}$ gilt:
  $\lim_{j \to \infty} \|\varphi_j - \varphi\|_{(m)} = 0$

  (mit diesem Konvergenzbegriff ist für jede Cauchyfolge $\varphi_j \in C_c^\infty(\Omega)$ die Grenzfkt. wieder in $C_c^\infty(\Omega)$)

- Eine stg. lin. Abb. $T: C_0^\infty(\Omega) \to \mathbb{K}$ heißt Distribution
- $\frac{\partial T}{\partial x_j} : C_0^\infty(\Omega) \to \mathbb{K} : \frac{\partial T}{\partial x_j}(\varphi) = -T\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right)$ ... partielle Abl. von T nach x_j
- Ist $f \in C^1(\Omega)$ stg. diffbar, dann gilt: $\frac{\partial}{\partial x_j} T_f = T_{\frac{\partial f}{\partial x_j}}$
- Ist $f \in C^1(\Omega)$, dann heißt $(T_f)'$ die distributionelle (part.) Ableitung
- $f \in C_0^\infty(\Omega)$, T Distr. auf Ω. Dann ist durch

$$f \cdot T(\varphi) := T(f\varphi) \quad (f \cdot \varphi \in C_0^\infty)$$

eine neue Distribution erklärt, das Produkt aus f und T.
- Produktregel: $\frac{\partial}{\partial x_j}(fT) = \frac{\partial f}{\partial x_j} T + f \frac{\partial T}{\partial x_j}$

$T_f(\varphi) := \int_\Omega f \cdot \varphi \, dx$

↳ Distribution auf Ω

↳ $T_f = T_g \Rightarrow f = g$

Distribution T heißt regulär wenn $T = T_f$

- Temperierte Distribution & Fourier-Trafo:
  - Sei $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. $\partial^{(l_1,\dots,l_n)} f := \frac{\partial^{l_1+\dots+l_n}}{\partial x_1^{l_1} \cdot \ldots \cdot \partial x_n^{l_n}} f$
  - f heißt rasch fallend, wenn $\forall \underline{l} \in \mathbb{N}_0^n \; \exists \underline{k}$ $|x_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{k_n} \cdot \partial^{\underline{l}} f| \to 0$ für $\|x\| \to \infty$
  - $\mathfrak{S}^{(n)} = \{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) ; f \text{ rasch fallend} \}$ ... Schwartz-Raum

    ↳ Konvergenzbegriff: $f_\nu \to f$ in $\mathfrak{S}^n$, wenn $\forall \underline{k}, \underline{l} \in \mathbb{N}_0^n$ gilt: $\|x_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{k_n} (\partial^{\underline{l}} f_\nu - \partial^{\underline{l}} f)\|_\infty \to 0$

    ↳ ist vollständig; dicht in Hilbertraum
  - $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow \varphi \in \mathfrak{S}^{(n)}$ (Konvergenzbegriffe stimmen überein)

  [Wdh.: $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$; $\hat{f}(\underline{x}) := \int_{\mathbb{R}^n} f(\underline{y}) e^{-2\pi i \langle \underline{x}, \underline{y} \rangle} d\underline{y}$

  : Sei $f \in \mathfrak{S}^{(n)}$, dann ist auch $\hat{f} \in \mathfrak{S}^{(n)}$ und es gilt: $\hat{\hat{f}} = f(-x)$; $\langle \hat{f}, \hat{g} \rangle = \langle f, g \rangle$]
  - Eine stg. lin. Abb. $T: \mathfrak{S}^{(n)} \to \mathbb{K}$ heißt temperierte Distribution
  - Sei T temp. Distribution, $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \Rightarrow T(\varphi) : C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{K}$ stg. $\Rightarrow$ temp. Distribution liefert Distribution
  - $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ (für ein $p \geq 1$ oder $p = \infty$ (d.h. $|f|$ beschränkt)). Dann ist durch $T_f(\varphi) := \int f \cdot \varphi \, d\underline{x}$ eine temp. Distr. definiert.
  - $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ heißt schwach wachsend, wenn $\forall \underline{l} \in \mathbb{N}_0^n$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt mit $\frac{\partial^{\underline{l}} f(x)}{\|x\|_2^N} \to 0$ $(\|\underline{x}\| \to \infty)$
  - Sei f schwach wachsend, dann def. $T_f(\varphi) := \int f \cdot \varphi \cdot d\underline{x}$ eine temp. Distribution